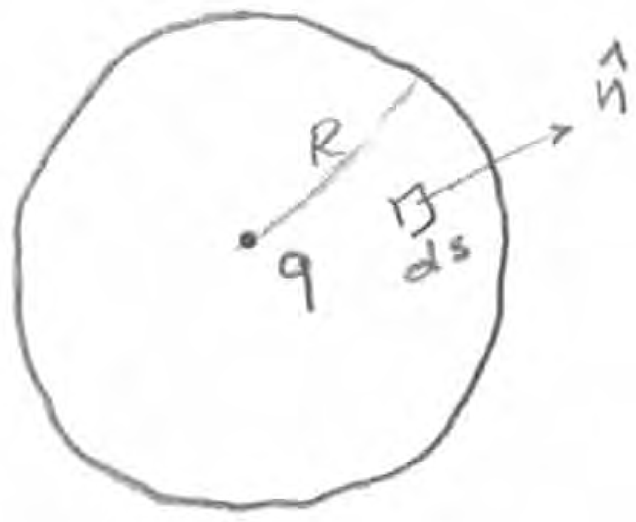
Teorema di Gauss

(DIMOSTRAZIONE STORICA)

(SFERA CAVA)



flusso di un campo su una superficie

$$\phi_S(\vec{E}) = \int_S \vec{E} \cdot \underbrace{\hat{n}\, ds}_{\text{ELEMENTO DI SUPERFICIE ORIENTATO}}$$

$d\vec{s} = ds\,\hat{m}$

A MENO DI UNA SCELTA DEL VERSO DEL VERSORE CAMBIA IL SEGNO DELL'INTEGRALE DELLO SCALARE TRA VERSORE E CAMPO ELETTRICO

VERSORE CON DIREZIONE CARICA E SUPERFICIE INFINITESIMA

$$\phi_S(\vec{E}) = \int_S \vec{E}\hat{n}\,ds = \int_S \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2} \cdot \hat{n}\, ds = \int_S \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{ds}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \int_S ds = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$\hat{r}\cdot\hat{n} = 1$; $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} = \boxed{\text{cost}}$; $\int_S ds = 4\pi r^2$

r^2: COSTANTE POICHÉ LA CARICA È AL CENTRO ED È EQUIDISTANTE

Una qualunque superficie chiusa con una qualunque carica se calcolate il flusso avrete sempre la dipendenza dalle cariche ~~esterne~~ interne, con qualunque campo elettrico esterno.

$$\phi_S(\vec{E}) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

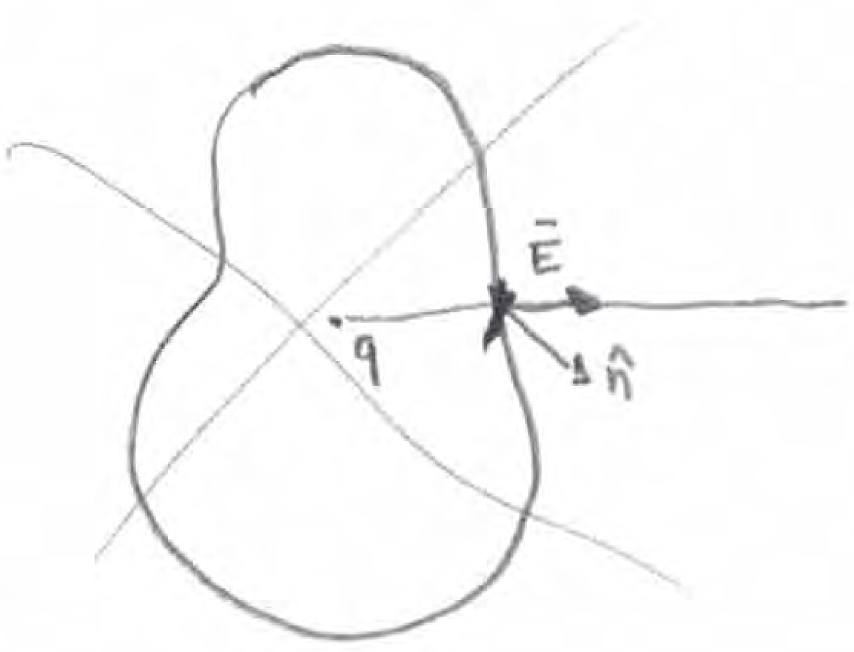
DIMOSTRAZIONE CRUCIALE

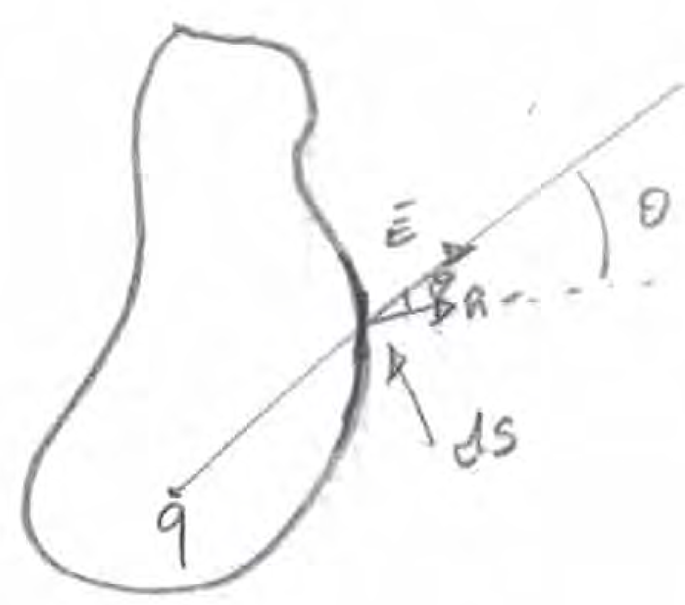
DA QUESTO TEOREMA CONSEGUE LA PRIMA EQUAZIONE DI MAXWELL

È UTILE ANCHE PRATICAMENTE

se ES è il prodotto del campo elettrico per la superficie (il flusso)

grazie a Gauss so che $\phi_S(\vec{E}) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow ES = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q_{int}}{S\varepsilon_0}$



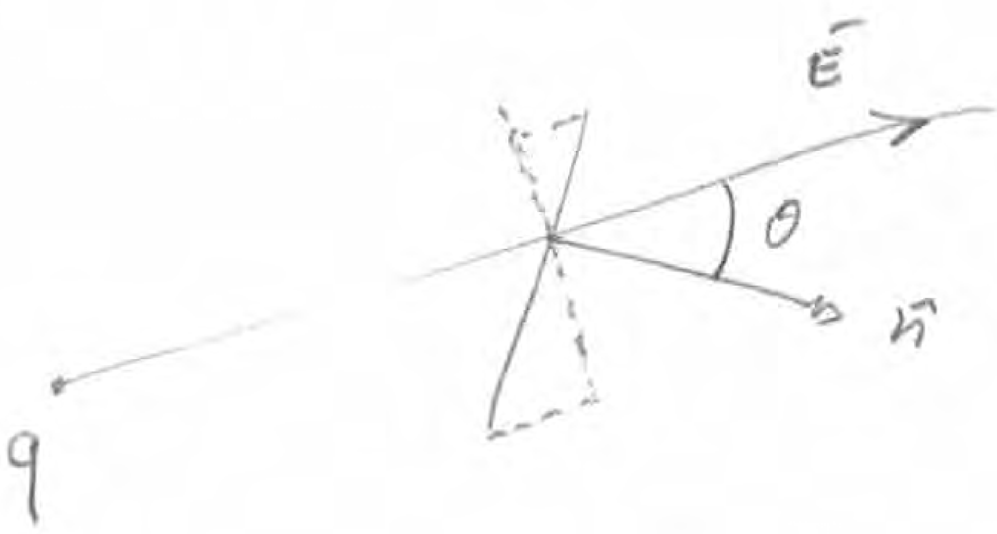


$$d\phi(\vec{E}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \overbrace{\frac{\hat{r}}{r^2} \cdot \hat{n}}^{\cos(\theta)}\, ds =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{ds\cos(\theta)}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\, d\Omega$$

$ds\cos(\theta)$ è la proiezione del segmento ds alla superficie normale all'asse del campo elettrico

dS_n



ANGOLO SOLIDO $\frac{dS_n}{r^2}$

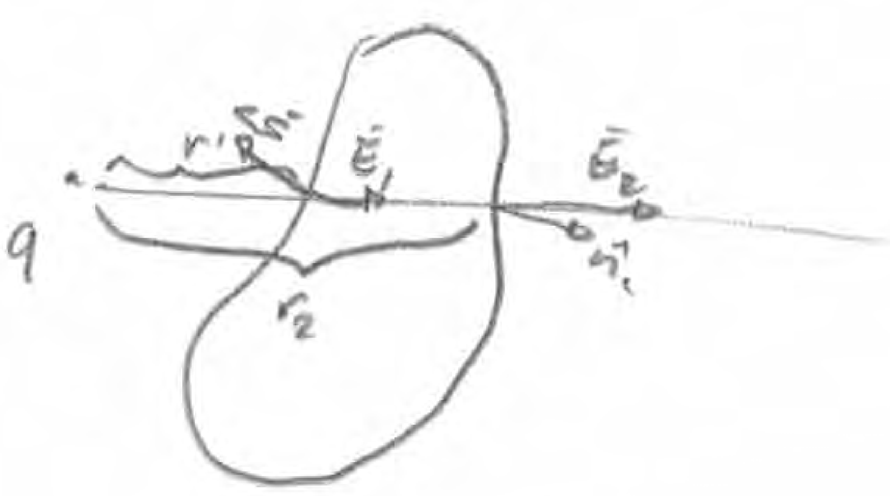
$$\int d\Omega = \int \frac{dS_n}{r^2} = \frac{1}{R_R^2} \int dS_n = 4\pi$$

$$\int d\phi_S(\vec{E}) = \int \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\, d\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} 4\pi = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$\bar{E} = \sum_i \bar{E}_i$

$$\phi = \int \bar{E}\,\hat{n}\,ds = \int \sum_i \bar{E}_i \cdot \hat{n}\,ds = \sum_i \int \bar{E}_i\,\hat{n}\,ds = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \quad \square$$

DIMOSTRIAMO CHE UNA CARICA ESTERNA NON PARTECIPA AL FLUSSO



$d\phi_s = -d\Omega + d\Omega = 0$ (senza carica ma è semplificabile)

poiché le normali delle superfici sono in direzioni opposte, il campo elettrico attraversa due volte la superficie

$$\phi_s(\bar{E}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\underbrace{\int_{\tau} \rho\,d\tau}_{\text{INTEGRALE DI VOLUME}}$$

QUALUNQUE SUPERFICIE

QUALUNQUE VOLUME

$$\parallel$$

$$\int_S \bar{E}\cdot d\bar{S}$$

$\parallel$ th. della divergenza

$$\int_\tau (\bar{\nabla}\cdot\bar{E})\,d\tau$$

(LA CONDIZIONE NECESSARIA È CHE IL CAMPO SIA CONTINUO)

$\Rightarrow$ $\bar{\nabla}\cdot\bar{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ STATIC

$\bar{\nabla}\cdot\bar{E}(\bar{r},t) = \dfrac{\rho(\bar{r},t)}{\varepsilon_0}$ VARIABILE

$\Downarrow$

PROBLEMI RELATIVISTICI

$c = \infty$

OMOGENEE ISOTROPE

(QUANDO INVECE C'È UNA DISCONTINUITÀ NON VALE PIÙ LA 1° Eq. di MAXWELL)

GUSCIO SFERICO

carica statica sulla calotta di sfera cava

$\sigma = \text{cost} = \dfrac{Q}{4\pi R^2}$

la simmetria sferica ci ricorda il campo è radiale.

$\vec{E} = E(r)\,\hat{r}$ radialità

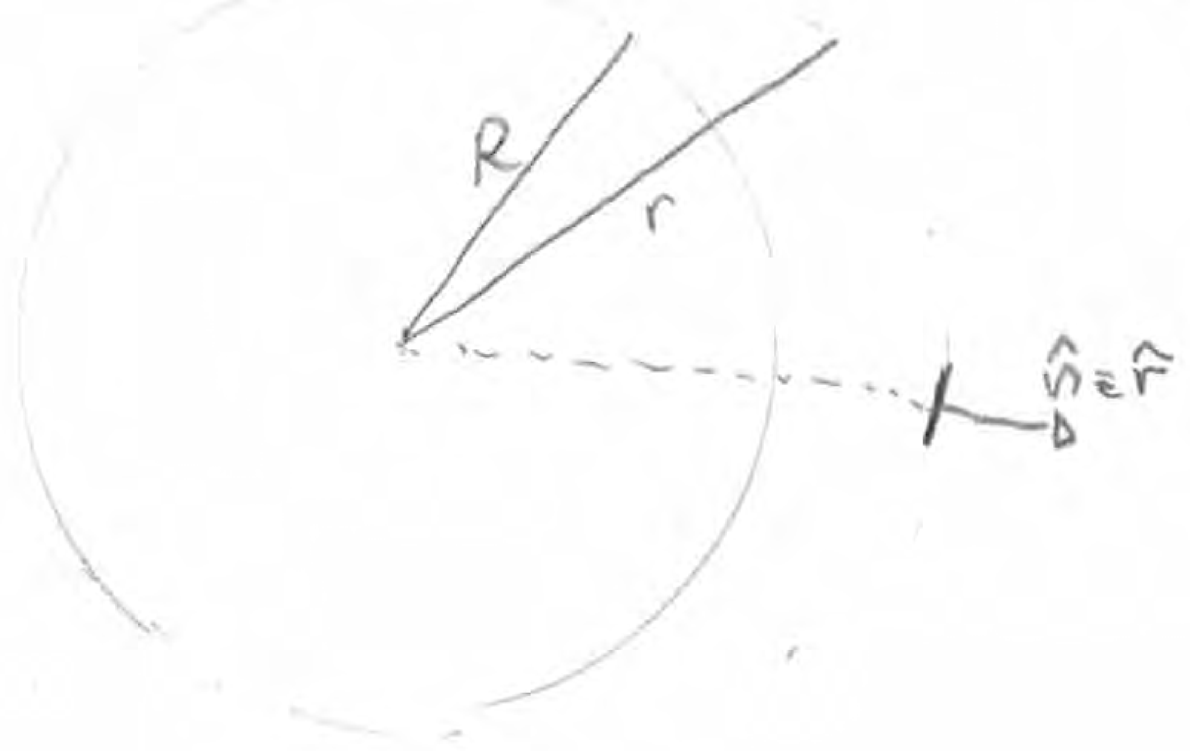
anche se è piena

$$\phi_S(\vec{E}) = \int_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int (E\hat{r})\cdot dS\,\hat{u} = \int_S E\,dS =$$

$$= \int_{S(R)} E(R)\,dS = 4\pi R^2 E = ES = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$4\pi R^2 E = \frac{Q(R)}{\varepsilon_0}\,\vec{r}$$

GUSCIO CAVO → GAUSS



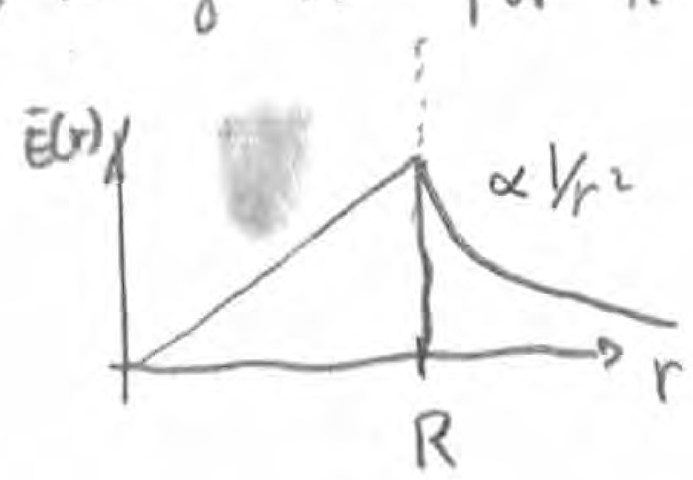
$$\phi_S(E) = \int_S E(r)\hat{r}\cdot\hat{n}\, dS = \int_S E(r)\, dS = E(r)\int_S dS = E(r)\, 4\pi r^2$$

$\hat{n} = \hat{n}$

$$\frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \begin{cases} r \geq R & \frac{Q}{\varepsilon_0} \\ r < R & 0 \end{cases} \qquad \bar{E}(r) = \begin{cases} 0 & r < R \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2} & r \geq R \end{cases}$$

$$Q_{int} = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$$

per $r \geq R$ vale anche con sfera piena carica omogenea $\rho = cost = \frac{Q}{\frac{4}{3}\varepsilon_0 \pi}$ ma per $r < R$ il campo è lineare, infatti si considera un guscio cavo di raggio r ovvero la distanza dal centro, mentre tutto ciò che è più lontano da r non entra in gioco per il Tn di Gauss.



$$\bar{E}(r) = \begin{cases} \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r} & r < R \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3} & r \geq R \end{cases}$$

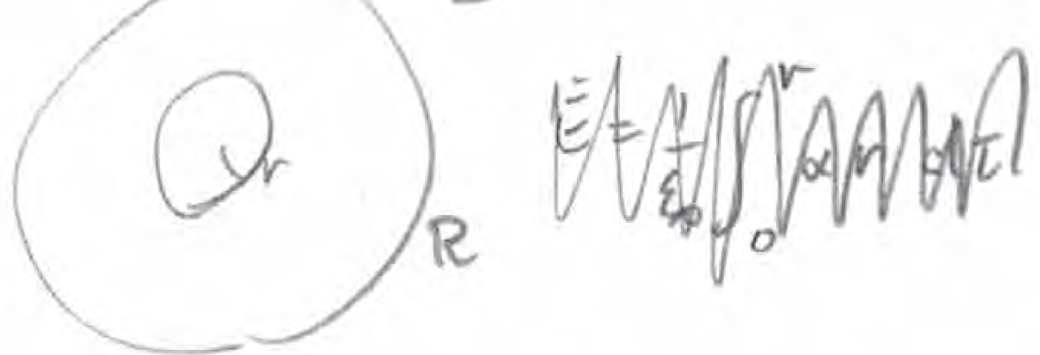
ESEMPIO (TIPO DI ESAME)

$\rho(r) = \alpha r$ densità radiale variabile.

$$Q = \int_\tau \rho\, d\tau = \int_\tau \alpha r\, d\tau = \int_0^R \alpha r\, 4\pi r^2 dr$$

GUSCIO PIENO CON CARICA VARIABILE

$\rho = \alpha r$



ESEMPIO DI SOLUZIONE

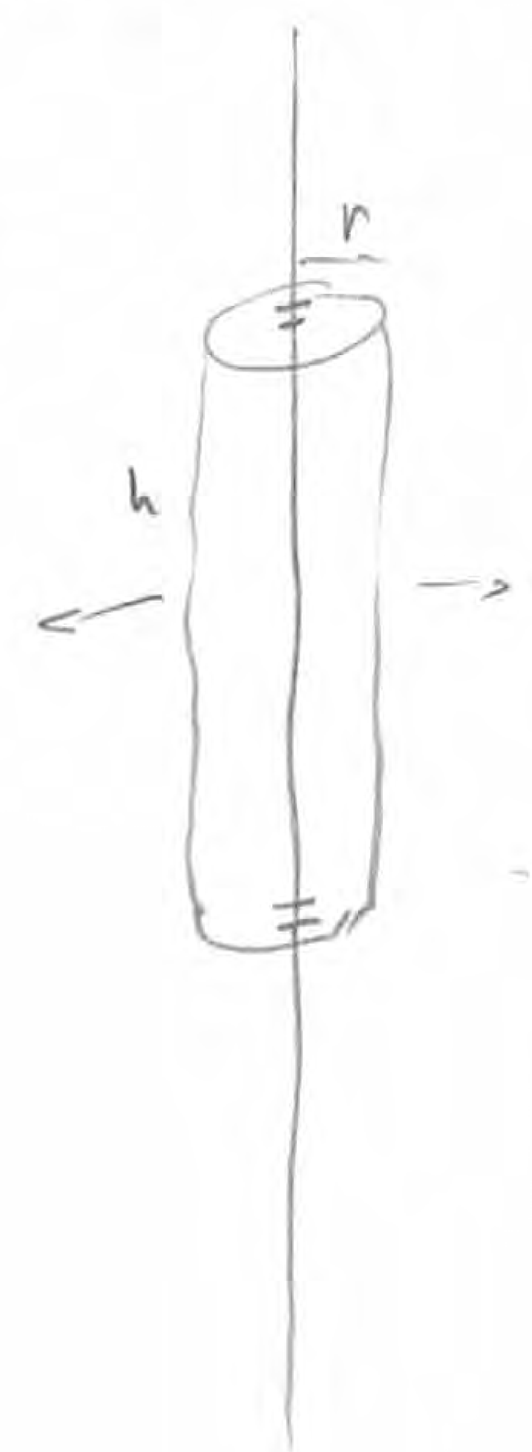
$$Q_{INT} = \int_\tau \alpha r\, d\tau = \int_0^r \alpha r\, 4\pi r^2 dr = 4\pi\alpha\frac{r^4}{4} =$$

$$Q_{INT} = \alpha\pi r^4$$

SOSTITUISCO $\cancel{4\pi r^2}\, \bar{E}(r) = \frac{\alpha \cancel{\pi} r^{\cancel{4}\, 2}}{\varepsilon_0}$

$$\bar{E}(r) = \frac{\alpha r^2}{4\varepsilon_0}$$

FILO INFINITO

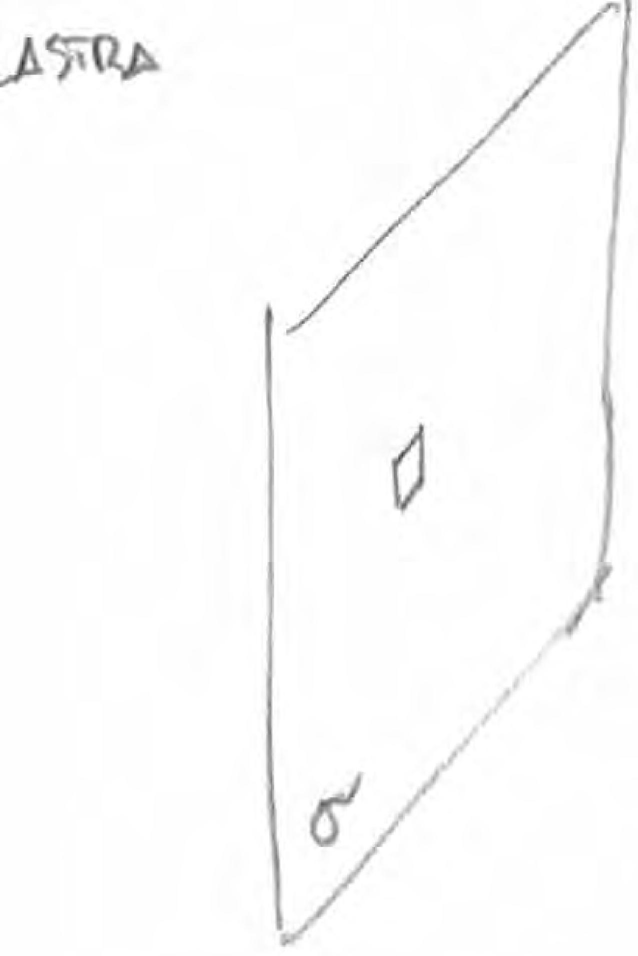


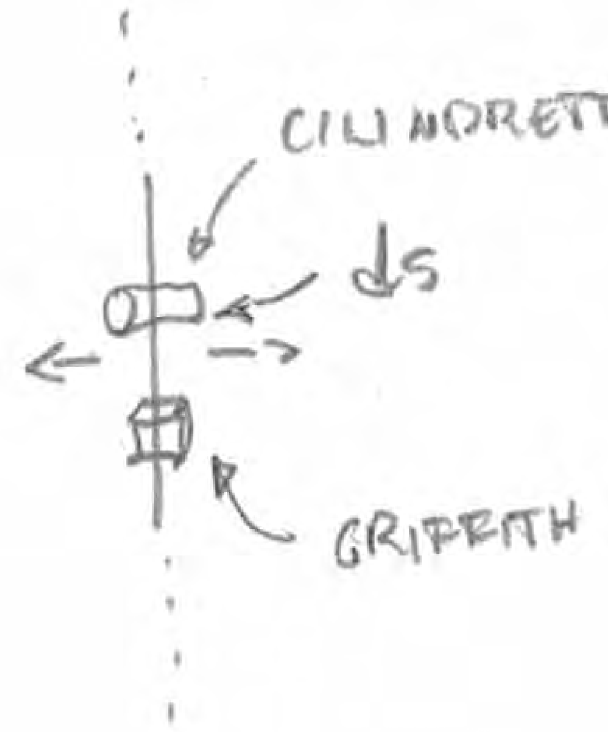
$\bar{E} = E(r)\hat{n}$

$E(r)$

$$\phi = \int E(r)\, dS = E(r)\, 2\pi r h = \frac{Q_{INT}}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$$

$$\bar{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\hat{n}$$



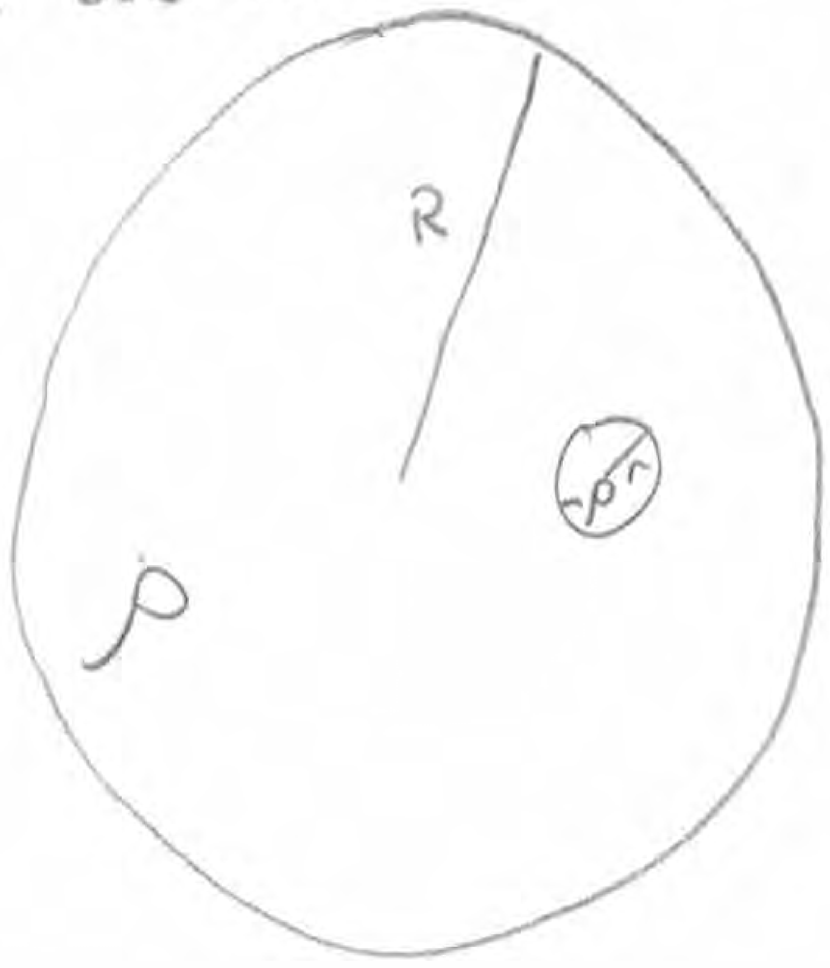


superficie parallela alla lastra

$$2E\,\cancel{dS} = \frac{dS\,\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

CAVA CON FORO

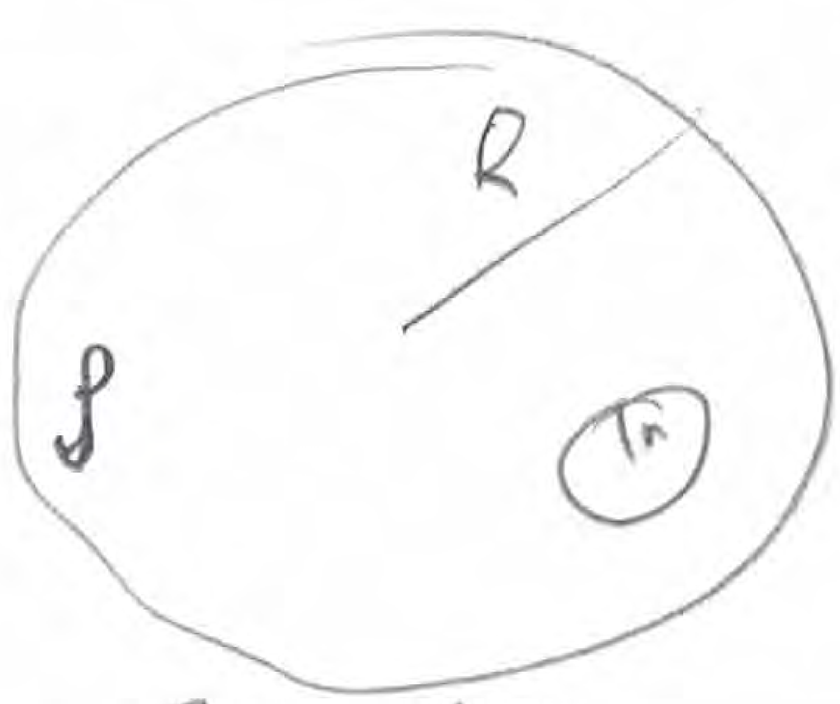


$\bar{E}_1(\rho, \dots)$

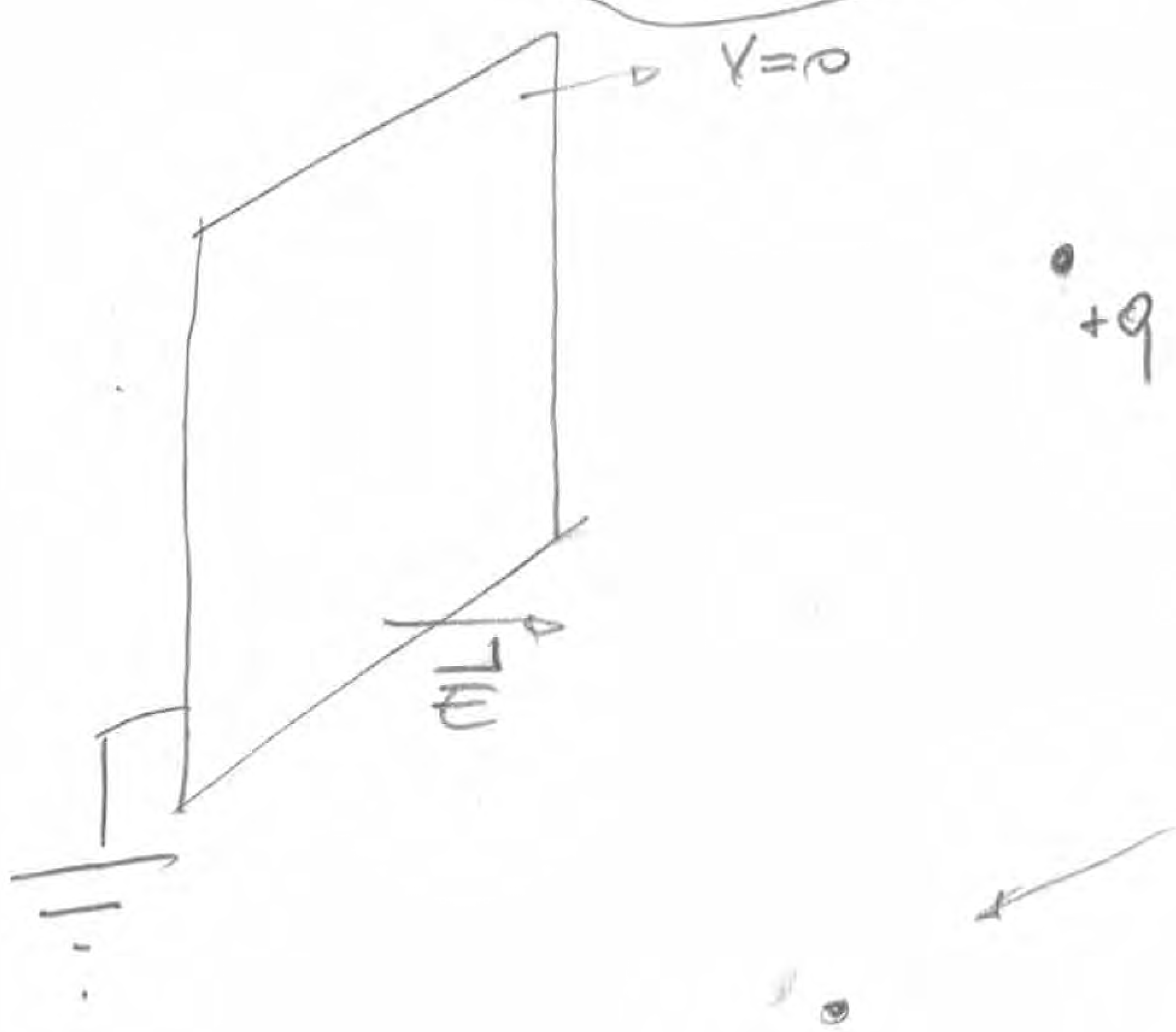
⊕ SOMMA VETTORIALE

$\bar{E}_2(-\rho, \dots)$

VERO ESERCIZIO: campo generato da sfera unif. carica "forata"



$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\varepsilon_0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \end{cases}$$



4/03/19

Proprietà dell'operatore divergenza (Studieremo la div di $\frac{1}{r^2}$)

Campi Scalari

$f(x,y,z,t) : \mathbb{R}^{3,4} \longrightarrow \mathbb{R}$ . . . . . . ρ · un esempio di campo scalare V potenziale elettrico

può dipendere da 4 coordinate

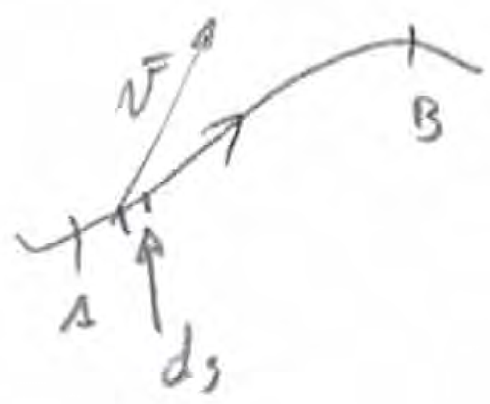
$\bar{v}(x,y,z,t) : \mathbb{R}^{3/4} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ . . . . $\bar{F}, \bar{E}, \bar{B} \rightarrow$ natura vettoriale

↳ identifica le proprietà di questo vettore.

$\bar{\bar{T}}$ campo tensoriale descritta da un vettore dipendente anche dalla direzione e verso.

(utile per descrivere la natura, ma con le dovute semplificazioni si possono evitare con omogeneità della natura)

Integrale di linea



Γ

$$\int_{\Gamma_{AB}} \underset{\text{vettore}}{\bar{v}} \cdot \underset{\text{elementino}}{d\bar{s}} = \int_{\Gamma_{AB}} v \cos(\theta)\, ds$$

$\rightsquigarrow$ riscrivibile anche nel piano cartesiano agendo sulle componenti di $d\bar{s}$

$$\int_{\Gamma_{AB}} (v_x dx + v_y dy + v_z dz)$$

CIRCUITAZIONE

$$\oint_{\Gamma} \vec{v} \cdot d\bar{s}$$

INTEGRALE DI FLUSSO

$d\bar{s} = ds \cdot \hat{n}$

$$\phi_S(\bar{v}) = \int_S \bar{v} \cdot d\bar{s}$$

vengono associati ad ogni integrale un operatore di derivazione

$\bar{\nabla}$ grad

$\bar{\nabla}\cdot$ divergenza

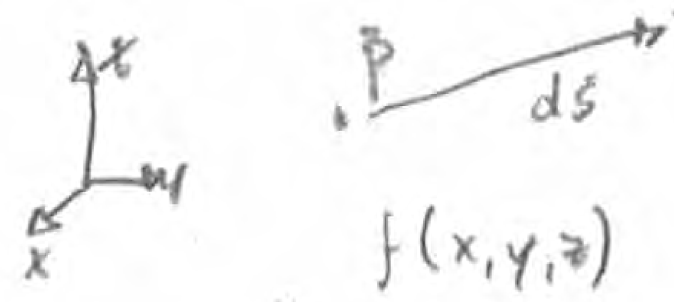
$\bar{\nabla}^2$ $\bar{\nabla}\cdot\bar{\nabla}$ laplaciano Δ (3 simboli)

$\bar{\nabla}\times$ rotore

↓ è un operatore

$$\bar{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$\bar{\nabla}$ utile con forze scalari conservative potenziali



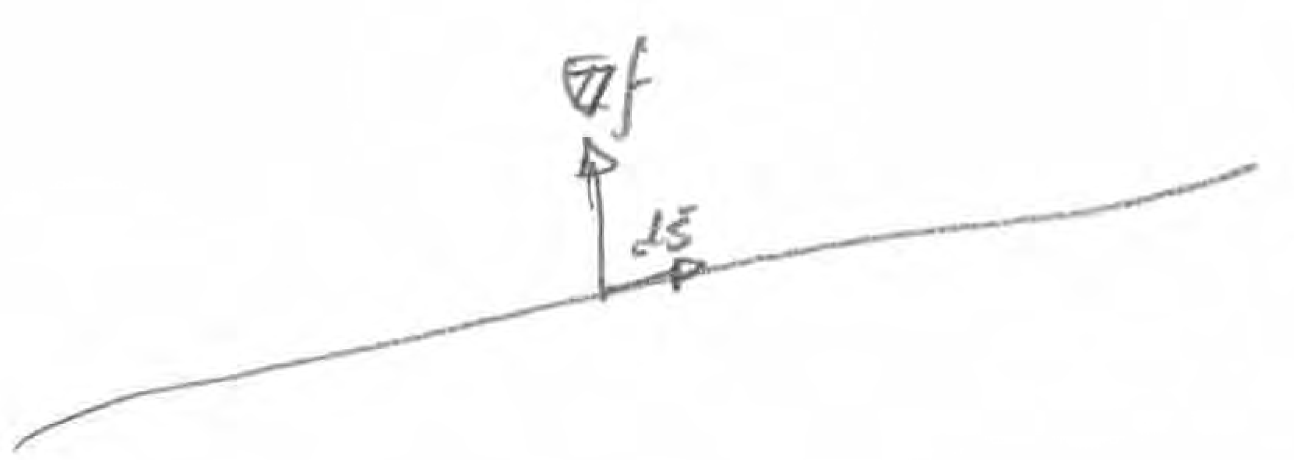
$f(x,y,z)$ $\bar{P}+d\bar{s}$ $f(x+dx, y+dy, z+dz)$

$f(x,y,z)$ voglio conoscere la variazione del potenziale

$$dF = f(x+dx, y+dy, z+dz) - f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz =$$

$= \bar{\nabla} f\, d\bar{s}$ (DEFINIZIONE FORMALE DI GRADIENTE) (derivata direzionale)

$= \bar{\nabla} f\, \hat{s}\, ds \Rightarrow \frac{df}{ds} = \bar{\nabla} f\, \hat{s}$



in questo modo il gradiente ci da la direzione di massima variazione (come linee di flusso)

$\bar\nabla f = \bar v \implies$ campo conservativo

$$\int_{\Gamma_A}^{B} \bar v \, d\bar s = \int_A^B \bar\nabla f \cdot d\bar s = \int_{\Gamma_{AB}} df = f(B) - f(A)$$ → indipendente dalla traiettoria

$\boxed{\text{funzione potenziale}}$

$$\oint_\Gamma \bar v \, d\bar s = \oint_\Gamma df = 0 \leftarrow \text{campo conservativo}$$

$\boxed{\text{LACAVA DISPENSINE UTILI}}$ (DIMOSTRAZIONI UTILI)

DIMOSTRAZ.

GRADIENTE CON COORDINATE POLARI

$$\begin{cases} x = r\, \text{sen}(\theta)\cos(\phi) \\ y = r\, \text{sen}(\theta)\, \text{sen}(\phi) \\ z = r\cos(\theta) \end{cases}$$

$df = \bar\nabla f \cdot d\bar s =$

$$= \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial f}{\partial \phi} d\phi$$

$$d\bar s = (dr, r\,d\theta, r\,\text{sen}(\theta)\,d\phi)$$

$$= (\bar\nabla f)_r \, dr + (\bar\nabla f)_\theta \, r\,d\theta + (\bar\nabla f)_\phi \, r\,\text{sen}(\theta)\,d\phi$$

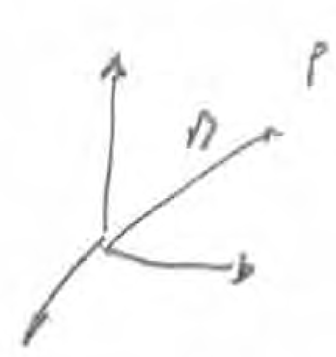
$$\bar\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{r\,\text{sen}(\theta)}\frac{\partial}{\partial \phi}\right)$$

COORDINATE CILINDRICHE
$$\begin{cases} x = r\cos(\phi) \\ y = r\,\text{sen}(\phi) \\ z = z \end{cases}$$

$$d\tau = r\,dr\,d\phi\,dz$$

ESEMPIO

$\bar\nabla f = ?$



$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ $\qquad f = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

$$\bar\nabla f = \frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\hat r = -\frac{\hat r}{r^2} = -\frac{\vec r}{r^3}$$

$\bar\nabla \cdot$ DIVERGENZA APPLICATO AD UN C. VETT. DA UN C. SCALARE

$$\bar\nabla \cdot \bar v = f = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Teo Div

$$\boxed{\bar v \cdot d\bar s = (\bar\nabla \cdot \bar v)\, d\tau}$$

$$(\bar\nabla \cdot)_r = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \cdot v_r\right)$$

⚠ ATTENZIONE ERRORI FREQUENTI

se $\bar\nabla \cdot \bar v = 0$ ovvero solenoidale $\implies \oint_S (\bar v) = 0$

$$\int_S \bar v \cdot d\bar s = \int_\tau (\bar\nabla \cdot \bar v)\, d\tau$$

$$\bar\nabla \times \bar v = \bar\mu = \begin{vmatrix} \hat i & \hat j & \hat k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \hat i\left[\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right] + \hat j\left[\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right] + \hat k\left[\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right]$$

Teorema di STOKES

versore uscente (regola MDESTRA)

$$\oint_\Gamma \bar v \cdot d\bar s = \int_\Sigma (\bar\nabla \times \bar v)\, d\bar s$$

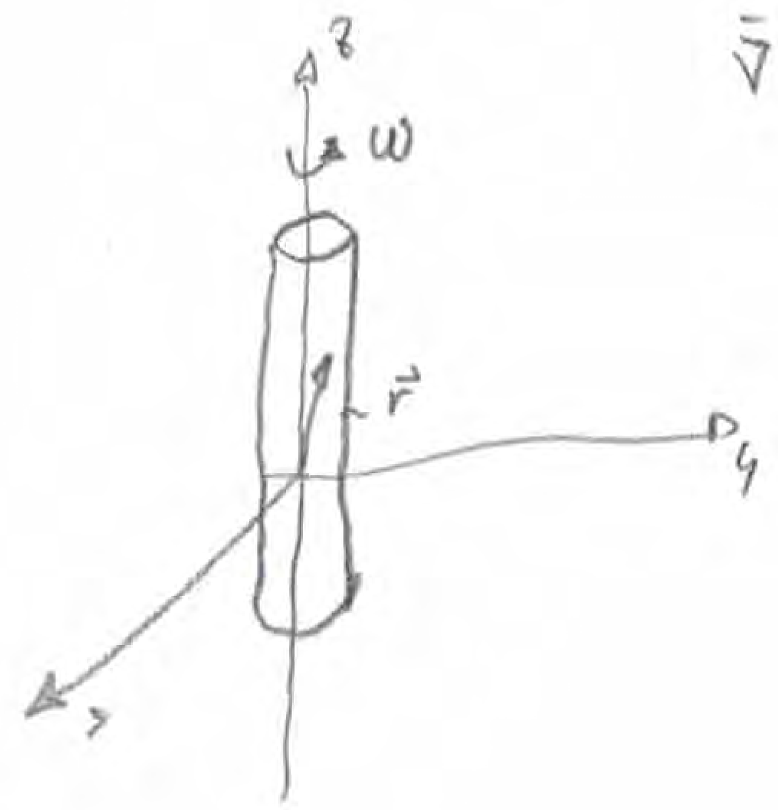
se irrotazionale $\bar\nabla \times \bar v = 0 \iff \oint_\Gamma \bar v \cdot d\bar s = 0 \ \forall \Gamma$ $\qquad \bar v = \bar\nabla f$

se $\bar v$ è un gradiente $\bar\nabla \times \bar v = \underbrace{\bar\nabla \times \bar\nabla}_{0} f = 0$

$\bar\nabla \times \left(\frac{\hat r}{r^2}\right)$ $\qquad \bar r = \frac{\bar r}{r^3} = \frac{\hat r}{r^2}$

$\bar\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\bar r}{r^3} = \frac{\hat r}{r^2}$ $\qquad \underbrace{\bar\nabla \times \bar\nabla}_{0}\left(-\frac{1}{r}\right) = 0$

CAMPO ROTAZIONALE DI UN CILINDRO



$\bar\nabla \times \bar v(x,y,z)$

$$\bar v = \bar\omega \times \bar r = \begin{vmatrix} \hat i & \hat j & \hat k \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = \hat i[-\omega y] + \hat j[\omega x] + \hat k[0]$$

$$\bar\nabla \times \bar v = \begin{vmatrix} \hat i & \hat j & \hat k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = \hat i[0] + \hat j[0] + \hat k\, 2\omega$$

$\bar\nabla \times \bar v = 2\omega \hat k$

$\bar\mu = \bar\nabla \times \bar v \qquad \bar\nabla \cdot \bar\mu = 0 \qquad \oint_S (\bar\mu) = 0 \quad \forall S$ chiusa $\quad$ solenoidale

$\bar\nabla \cdot \bar\nabla \times \bar v = 0$

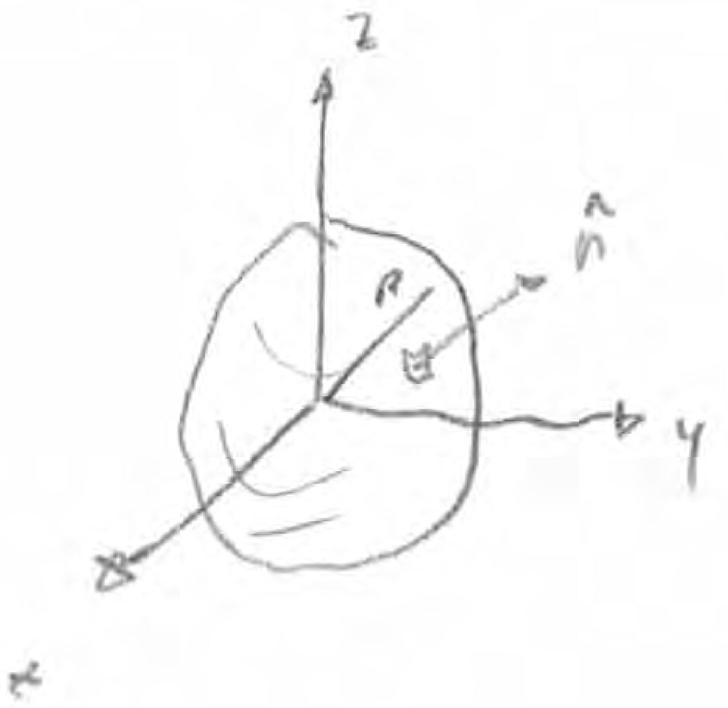
ESERCIZIO:

$$f = \frac{1}{r} \qquad \bar{\nabla} f = -\frac{\bar{r}}{r^3} = -\frac{\hat{r}}{r^2} = \bar{v}$$

$$\nabla \cdot \left[\frac{\hat{r}}{r^2}\right] = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{1}{r^2}\right) + \cancel{\frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{d}{d\theta}}_{=0} + \cancel{\frac{d}{d\phi}}_{=0} = 0$$

SIMMETRIA SFERICA

DIVISIONE PER $r = 0$!!!



$$\oint_S \left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right) = \int_S \frac{\hat{n}}{r^2} \cdot \hat{n}\, ds = \int_S \frac{ds}{r^2} = \int_S d\Omega = 4\pi$$

$\hat{n} = \hat{r}$

Teo Dir.

$$= \int_\tau \left(\bar{\nabla} \cdot \frac{\hat{r}}{r^2}\right) d\tau = 0$$

??? L'ERRORE È QUI

la Delta di Dirac

$R_n =$ AREA DI UN RETTANGOLO $\frac{1}{n}$ n

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \infty & x = 0 \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = 1 \qquad \lim_n R_n(x)$$

$$f(x)\,\delta(x-a) = f(a)\,\delta(x-a)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x-a)\,dx = f(a)$$

$$\bar{\nabla} \cdot \left[\frac{\hat{r}}{r^2}\right] = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \cdot \frac{1}{r^2}\right) = 4\pi\,\delta^3(\bar{r})$$

$$F = \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

$$E = mc^2$$

$$[m] = [E]$$

$$\alpha_{FIN} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{e^2}{\hbar c} = 1/137 \qquad m_e = 0.5\ \text{MeV}$$

$\hbar = c = 1$ MeV · fm

$$[L] = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} \longrightarrow \frac{\hbar^2 c^2}{m_e e^2 c^2} = \frac{\hbar c}{m_e c^2}$$

$[E][t][L]/[t]$

$$[L] = [m]^{-1}$$

$$E_B = \int d^3x\, B^2$$

$$E_E = \int d^3x\, E^2$$

$$\bar{v} = \frac{\bar{r}}{r^3} \cdot \quad \bar{\nabla}\cdot\bar{v} = \bar{\nabla}\cdot\left(\frac{\bar{r}}{r^3}\right) = 4\pi\,\delta^{(3)}(\bar{r})$$

DELTA DI DIRAC $\delta^3(r) = \begin{cases} 0 & \bar{r}\neq 0 \\ \infty & \bar{r} = \underline{0} \end{cases}$

$$\int f(\bar{r})\,\delta^{(3)}(\bar{r}-\bar{r}_0)\,d\tau = f(\bar{r}_0) \qquad \int \delta^3(\bar{r})\,d\tau = 1$$

$\boxed{\text{MAXWELL}}$ CAMPO ELETTRICO

$$\bar{E}(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\tau \frac{\rho(\bar{r}')\,(\bar{r}-\bar{r}')}{|\bar{r}-\bar{r}'|^3}\,d\tau'$$

integra $\to x', y', z'$ (non agisce la divergenza)

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{E} = \underbrace{\bar{\nabla}}_{\substack{\text{AGISCE SULLE COORDINATE}\\ x,y,z}}\cdot\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\tau \frac{\rho(\bar{r}')\,(\bar{r}-\bar{r}')}{|\bar{r}-\bar{r}'|^3}\,d\tau' \to \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\tau \rho(\bar{r}')\,\bar{\nabla}\cdot\left(\frac{\bar{r}-\bar{r}'}{|\bar{r}-\bar{r}'|^3}\right)d\tau'$$

$$\bar{\nabla}\cdot\left(\frac{\bar{r}}{|\bar{r}|^3}\right) = 4\pi\,\delta^3(\bar{r})$$

$$\bar{\nabla}\cdot\left(\frac{\bar{r}-\bar{r}'}{|\bar{r}-\bar{r}'|^3}\right) = 4\pi\,\delta^{(3)}(\bar{r}-\bar{r}')$$

$$= \frac{1}{\cancel{4\pi}\varepsilon_0}\int_\tau \rho(\bar{r}')\,\delta^{(3)}(\bar{r}-\bar{r}')\,d\tau' =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0}\int_\tau \rho(\bar{r}')\,\delta^{(3)}(\bar{r}-\bar{r}')\,d\tau' =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\bar{r}) \qquad \bar{\nabla}\cdot\bar{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\bar{r})$$

1° Eq di MAXWELL

$\to$ INTEGRANDO E APPLICANDO IL TEO DI GREEN HO IL TEOREMA DI GAUSS

$$\begin{cases} \bar{\nabla}\cdot\bar{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \bar{\nabla}\times\bar{E} = 0 \end{cases}$$

ELETTROSTATICO

$\overbrace{C.C.:\ \bar{E}(\infty) = 0}$ NON PER PIANI E FILI CARICHI INFINITAMENTE

$\bar{E}$ DIMOSTRAZIONE DIDATTICA DI FEYMANN

$$\bar{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\tau \rho(\bar{r}')\,\frac{(\bar{r}-\bar{r}')}{|\bar{r}-\bar{r}'|^3}\,d\tau'$$

$$\bar{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\bar{r}}{r^3} = -\frac{\hat{r}}{r^2}$$

$$\bar{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\tau \rho(\bar{r}')\left(-\bar{\nabla}\left(\frac{1}{|\bar{r}-\bar{r}'|}\right)\right)d\tau'$$

$$\left(\frac{\bar{r}-\bar{r}'}{|\bar{r}-\bar{r}'|^3}\right) = -\bar{\nabla}\left(\frac{1}{|\bar{r}-\bar{r}'|}\right)$$

grad

$\bar{\nabla} \to x, y, z$; $d\tau' \to x', y', z'$ $\Rightarrow$ POSSO TIRARE FUORI DALL'INTEGRALE

$$\bar{E} = -\bar{\nabla}\Bigg[\overbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\tau \frac{\rho(\bar{r}')\,d\tau'}{|\bar{r}-\bar{r}'|}}^{\text{SCALARE}}\Bigg] = -\bar{\nabla}V(\bar{r})$$

$$\left[\bar{E} = -\bar{\nabla}V\right]$$ gradiente del potenziale Elettrostatico

$$\bar{\nabla}\times\bar{E} = -\underbrace{\bar{\nabla}\times\bar{\nabla}}_{0}\bar{E} = 0$$

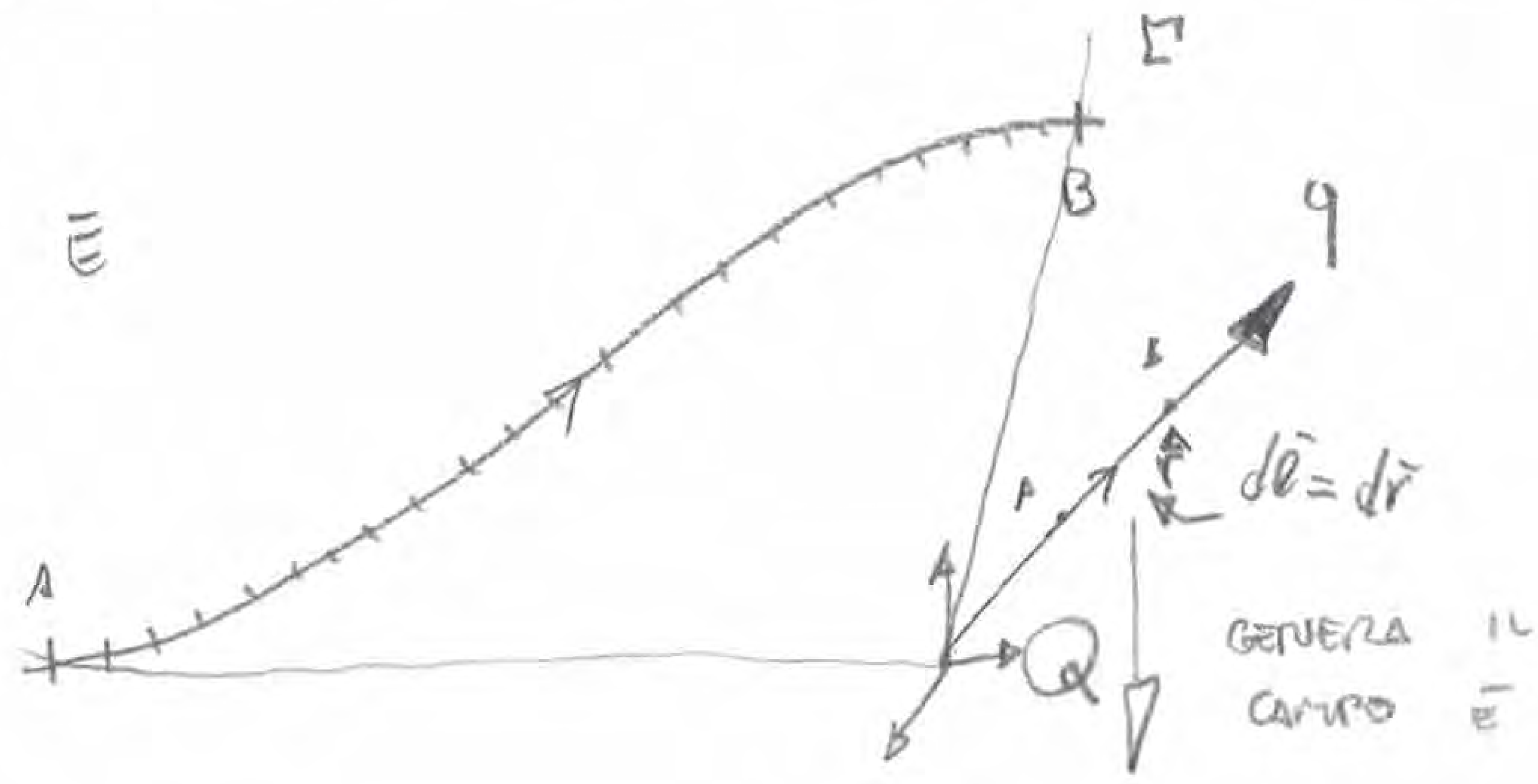
III Eq di MAXWELL

ROTORE DEL CAMPO <u>ELETTROSTATICO</u>

IRROTAZIONALE $\Rightarrow$ POSSO TRATTARE CON UN ~~CADRO~~ SCALARE POTENZIALE

$$V(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\tau} \frac{\rho(\bar{r}')}{|\bar{r}-\bar{r}'|}\, d\tau' + \underbrace{C}_{\text{COSTANTE ARBITRARIA}}$$

DIMOSTRAZIONE IL LAVORO DEL CAMPO ELETTROSTATICO È INVARIANTE PER TRAIETTORIA



$$L_{AB_\Gamma} = \int_\Gamma \bar{F}\, d\bar{l} =$$

GENERA IL CAMPO $\bar{E}$

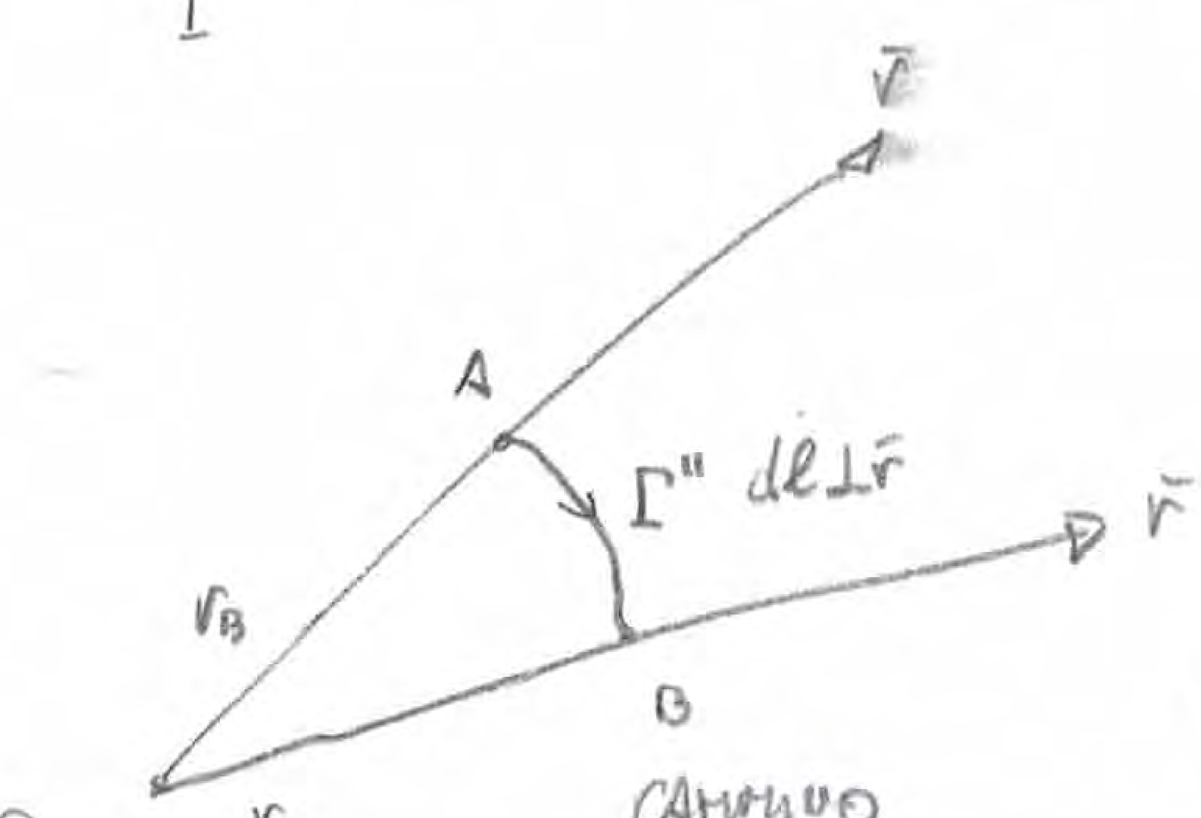
$$\bar{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\,\hat{r}$$

$$= \int_\Gamma q\, \bar{E}\, d\bar{l}$$

$$L_{AB} = \int_{\Gamma'} q\,\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{r^2}\,\hat{r}\, d\bar{l} \implies L_{AB} = \int_\Gamma \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\underbrace{\hat{r}\cdot\hat{r}}_{1}\, d\hat{r} =$$

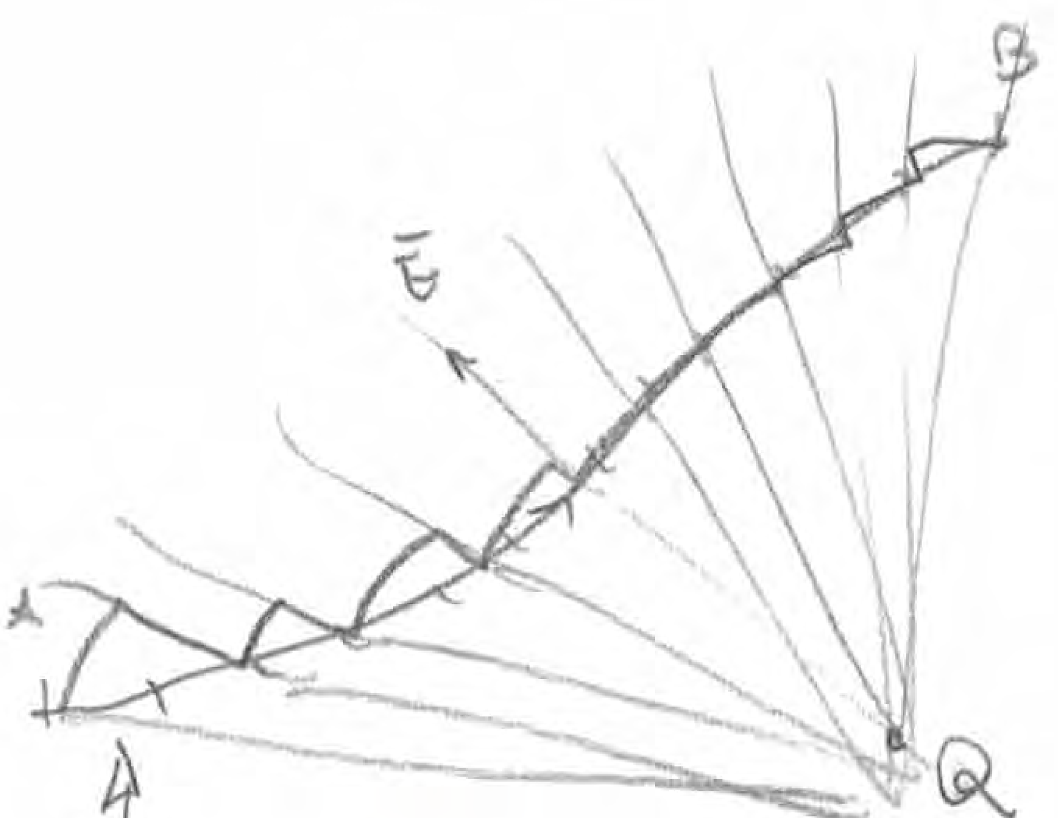
MA LO SPOSTAMENTO È PARALLELO AL VERSORE QUINDI $d\bar{l} = \hat{r}\, d\bar{r}$

$$= \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right]$$



CAMMINO RADIALE

$$L_{AB}(\underbrace{d\bar{l}\cdot\bar{\Gamma}}_{0}) = 0$$



MUOVENDOSI SU LINEE RADIALI (IDEE DI FEYNMAN)

APPROSSIMATO CON TRATTI CON TRATTI DI CIRCONFERENZA E TRATTI RADIALI

$$L \simeq \sum_i L_i = \left(\frac{1}{r_A} \underbrace{- \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_1}}_{0} \underbrace{- \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_2}}_{0} - \dots - \frac{1}{r_B}\right) = \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

$$f\left(\frac{1}{r_A}\right) - f\left(\frac{1}{r_B}\right)$$

$$[E] = [\nabla][V] = \frac{[V]}{[L]} = \frac{V}{m} = \frac{N}{C}$$

$$\oint_\Gamma \bar{E}\cdot d\bar{l} = 0 \quad \forall\Gamma \quad \bar{E} = -\nabla V \implies \bar{\nabla}\times\bar{E} = 0$$

$$\bar\nabla \cdot \bar E = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \longrightarrow \rho = \varepsilon_0 \bar\nabla \cdot \bar E$$

$\bar E = k r^3 \hat r$ ① ρ ?

$\bar E = (E_r, 0, 0)$ in cosferiche ② Q R ?

$$\rho = \varepsilon_0 \bar\nabla \cdot \bar E = \varepsilon_0 \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 E_r) = \varepsilon_0 \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 k r^3 \hat r\right) = \frac{5r^{4}}{r^2} k\varepsilon_0 = 5r^2 k \varepsilon_0$$

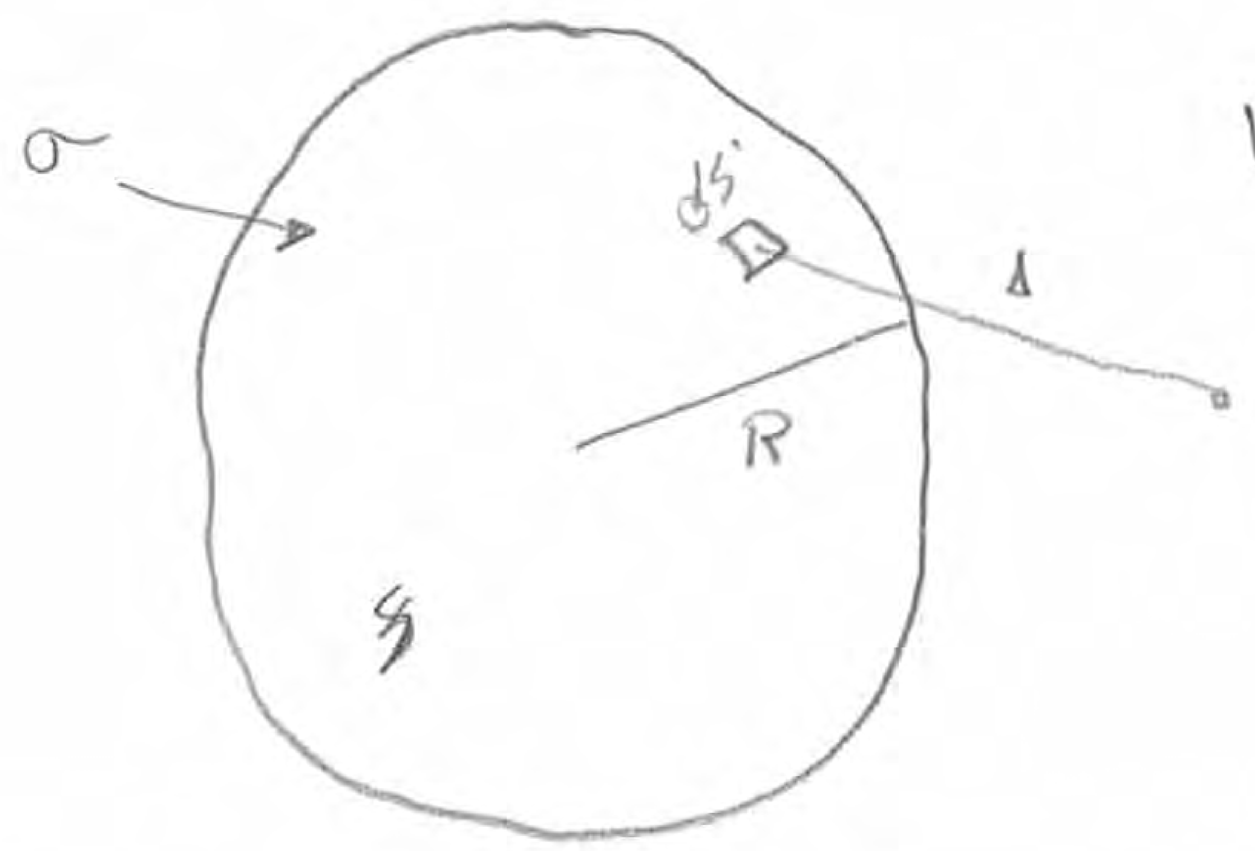
$$Q = \int_\tau \rho \, d\tau$$

$Q = \varepsilon_0 \, \phi_S(\bar E)$ GAUSS se avesse chiesto solo la carica

$$= \varepsilon_0 \int_S k r^3 \underbrace{\hat r \, d\hat s}_{1} \, ds = \varepsilon_0 k R^3 \int_S ds = \varepsilon_0 k R^3 4\pi R^2 = 4\pi\varepsilon_0 k R^5$$

ESEMPIO ②

$\bar E$, V



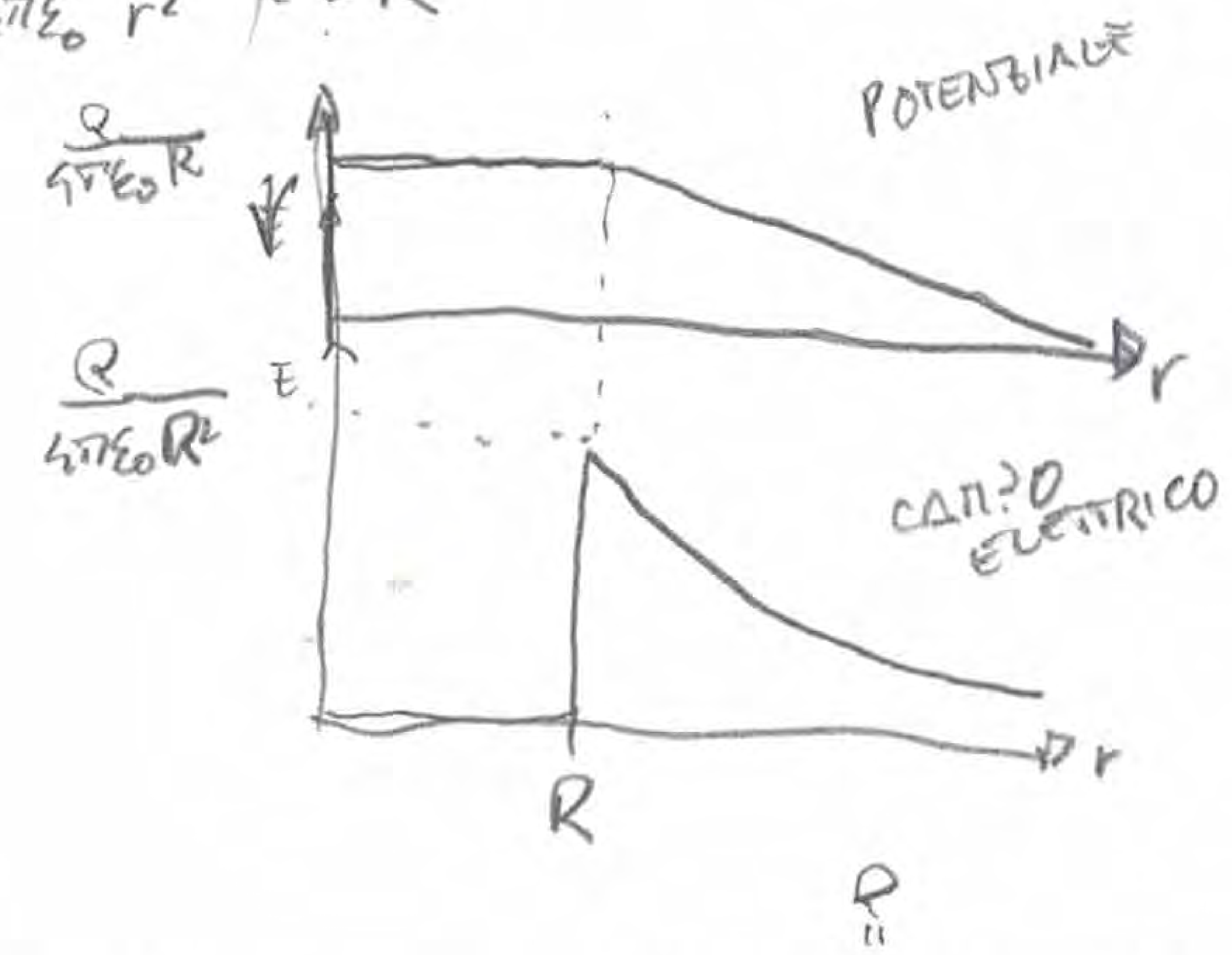
$$V(\bar r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\sigma(\bar r')}{|\bar r - \bar r'|} ds'$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\sigma \, ds'}{\Delta} = \Delta V$$

$\bar E = \bar E(r) \hat r$

$$E(r)\hat r = \begin{cases} 0 & r < R \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2}\hat r & r \geq R \end{cases}$$

$Q = \sigma 4\pi R^2$



$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \qquad \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

$$\bar E = -\bar\nabla V$$

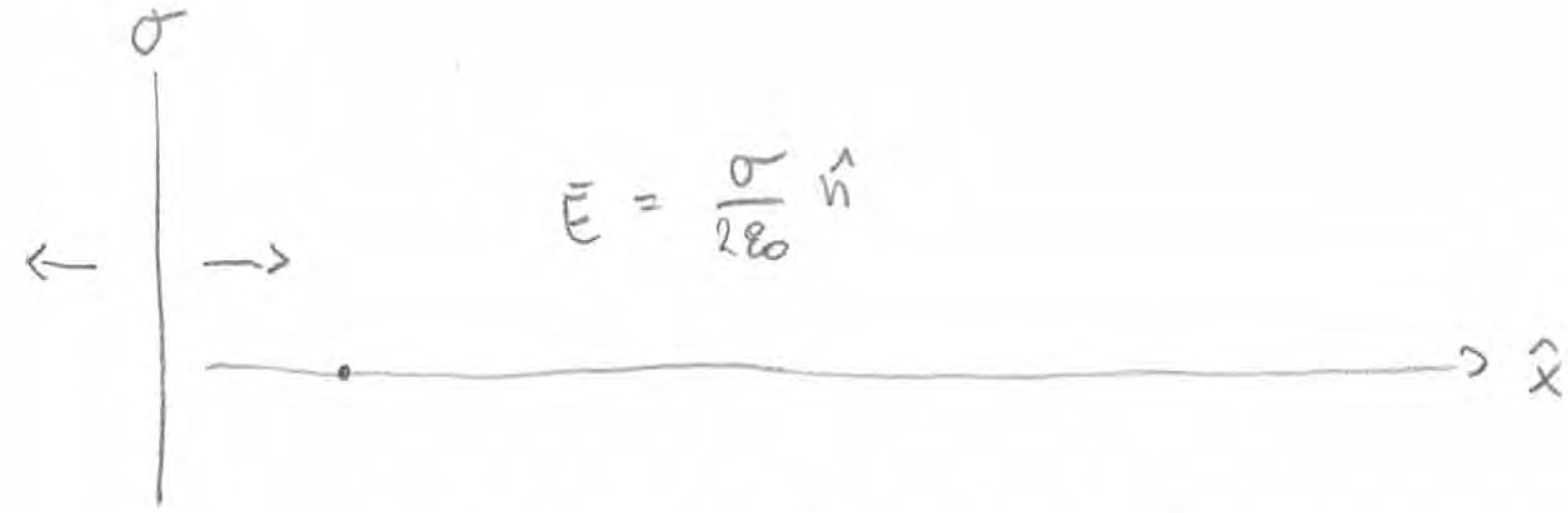
$$\int_\Gamma \bar E \cdot d\bar l = \int_\Gamma -\bar\nabla V \cdot d\bar l = -\int dV = -\Delta V$$

$V(r)$ $r \geq R$

$V(\infty) = 0$

$$\int_r^\infty \bar E \cdot d\bar l = \int_r^\infty \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\hat r \, d\hat r \, dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} = V(r) - \overset{0}{V(\infty)} = V(r)$$

$$\int \bar E \cdot d\bar l = \int_a^\infty E(r)\,dr = \int_r^R \overset{0}{E} dr + \int_R^\infty E \, dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$



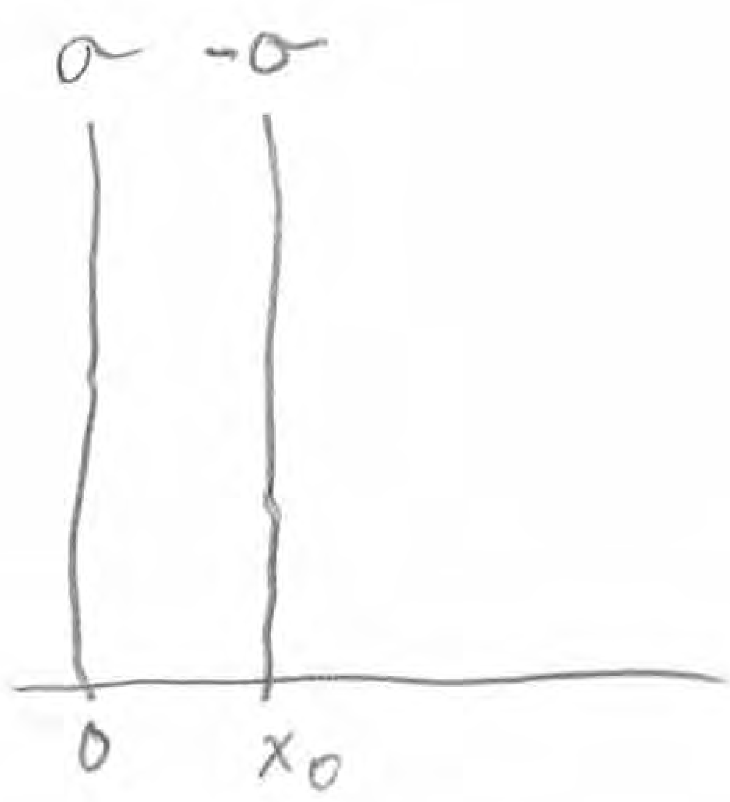
$$\bar{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{n}$$

$$\int_r \bar{E}\cdot d\bar{l} = \int_x^{\infty} E\,dx' = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\underbrace{(\infty - x)}_{\text{diverge}} = V_x - V(\infty)$$

$\boxed{\text{NON SI PUÒ FARE}}$

$V(x) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}x$ QUESTO PREVEDE CHE $V(0) = 0$

ESERCIZI



graficare il potenziale