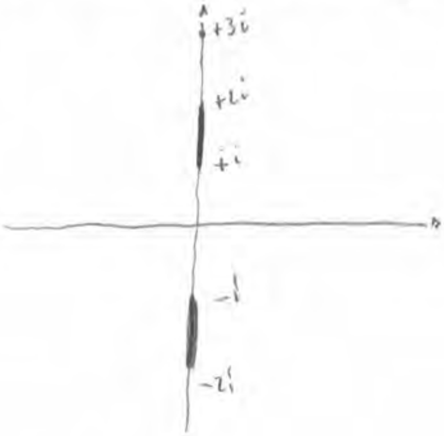
ESERCIZIO x CASA

$f(z) = \sqrt{(z^2+1)(z^2-4)}$ Mostrare che il punto all'∞ non è un punto di Branch

$$(z^2+1)(z^2-4) = (z+i)(z-i)(z+2i)(z-2i)$$

sul foglio in cui $f(0) = 2$

Determinare $f(3i)$

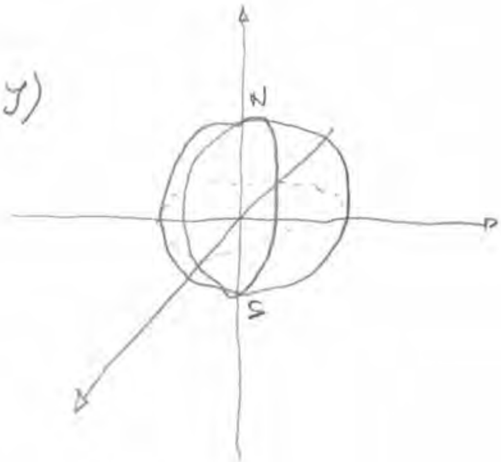


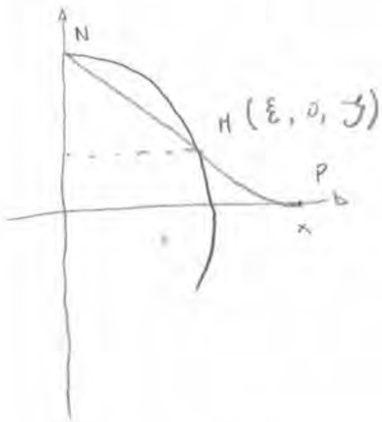

8/3/19

La sfera di Riemann e il punto all'infinito.

Proiezione stereografica: mappa dei punti della sfera sul piano complesso

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1 \qquad P = (\xi, \eta, \zeta)$$




$$x = \frac{\xi}{1-\zeta}$$

se il punto fosse su $x=0$

$$y = \frac{\eta}{1-\zeta}$$

$$\xi = x(1-\zeta)$$

$$\eta = y(1-\zeta)$$

$$x^2(1-\zeta)^2 + y^2(1-\zeta)^2 + \zeta^2 = 1$$

$$(x^2+y^2)(\zeta^2+1-2\zeta) + \zeta^2 = 1$$

$$\zeta^2(1+x^2+y^2) - 2\zeta(x^2+y^2) + x^2+y^2-1 = 0$$

$$\zeta_{1,2} = \frac{x^2+y^2 \pm \sqrt{(x^2+y^2)^2 - (x^2+y^2-1)(x^2+y^2+1)}}{x^2+y^2+1} =$$

$$= \frac{x^2+y^2 \pm \sqrt{(x^2+y^2)^2 - (x^2+y^2)^2 + 1}}{x^2+y^2+1} =$$

$$= \frac{x^2+y^2 \pm 1}{x^2+y^2+1}$$

$$N = \frac{x^2+y^2+1}{x^2+y^2+1}$$

$$S = \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}$$

$$\boxed{\xi = \frac{2x}{x^2+y^2+1} \qquad \eta = \frac{2y}{x^2+y^2+1} \qquad \zeta = \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}}$$

$|z|>1$ $x^2+y^2>1$ EMISFERO NORD

$|z|=1$ $x^2+y^2=1$ EQUATORE

$|z|<1$ $x^2+y^2<1$ EMISFERO SUD

$z=0$ POLO SUD $S=(0,0,-1)$

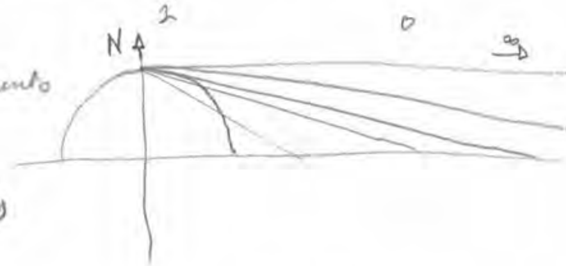
IL POLO NORD NON È MAPPATO SUL PIANO $\mathbb{C}$

$|z| \to \infty$

$x^2+y^2 \to \infty$

$$\lim_{x^2+y^2\to\infty} \zeta = \lim_{x^2+y^2\to\infty} \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1} = \lim_{x^2+y^2\to\infty} \underbrace{\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+1}}_{=1} + \lim_{x^2+y^2\to\infty}\underbrace{\left(-\frac{1}{x^2+y^2+1}\right)}_{=0} = 1$$

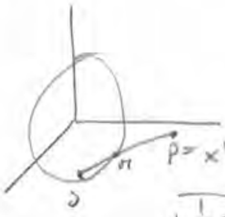
$S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ $\quad$ $\{\infty\}$ è rappresentabile come un unico punto indipendente da rotazioni




è il punto che mappa il polo NORD di $S^2$. Infatti il Polo NORD non è mappabile con i numeri complessi

$\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

Esercizio:

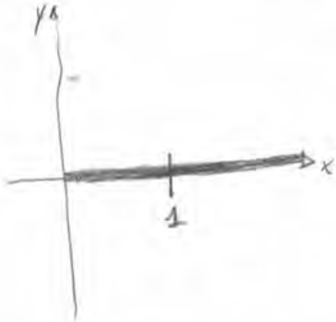


Mappare dal lato sud la sfera su $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$

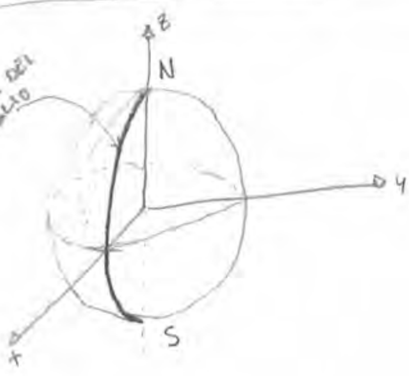
$P = x' - iy' = w$

$\boxed{\frac{1}{w} = z}$ → Questa è la relazione che c'è tra le coordinate rispetto al pole SUD e NORD

MAPPIAMO I TAGLI DELLE DIRAMAZIONI SULLA SFERA DI RIEMANN




$\Rightarrow$



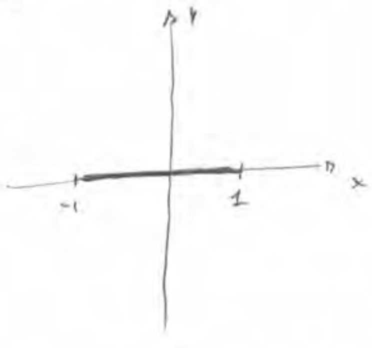

sotto l'equatore sto mappando il taglio da 0 a 1

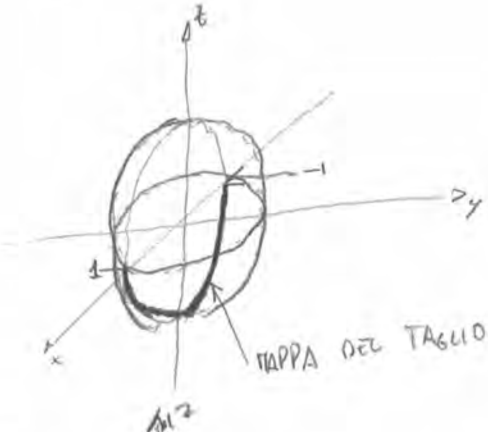
dall'eq. in su mappo dal punto 1 al punto $\infty$

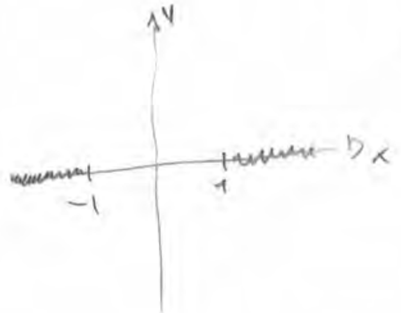
RIPRENDIAMO L'ESEMPIO

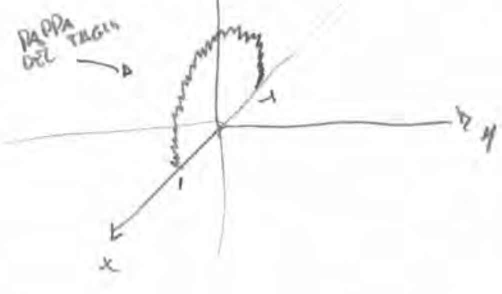
$f(z) = (z^2-1)^{1/2}$ $\quad$ $z = \pm 1$

il taglio di $f(z)$ è

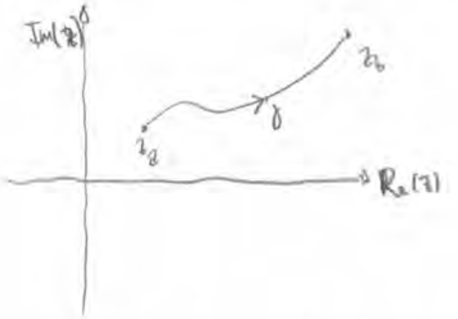


Def Integrale di $f(z)$ nel piano complesso



$t \in [a,b] \in \mathbb{R}$ $\quad t \to \gamma(t) = x(t) + i\,y(t)$

$x = x(t)$ $\quad z_a = \gamma(a)$

$y = y(t)$ $\quad z_b = \gamma(b)$

$$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))\,\frac{dz}{dt}\,dt = \int_a^b [\,u(x,y) + i\,v(x,y)\,]\left[\frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt}\right]dt$$

la curva non si auto-interseca se la mappa è iniettiva $\quad \gamma(t_1) \neq \gamma(t_2) \quad t_1 \neq t_2$

Curva chiusa è $\gamma(a) = \gamma(b)$

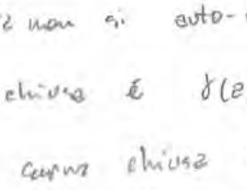
Una curva chiusa ha orientazione positiva se all'aumentare di $t$ ci muoviamo in senso antiorario (Regola MANO DESTRA, uscente dal piano $\Rightarrow$ positiva)

Consideriamo sempre curve regolari e tratti.

Tipo una cuspide è regolare e tratti

Cerchio raggio / centrato in $z_0$ $\qquad \gamma(t) = z_0 + r e^{it}$ $\quad$ con $t \in [0, 2\pi]$

Consideriamo un dominio D aperto e connesso



$\gamma_1$ e $\gamma_2$ si dicono OMOTOPE in D se $\exists$ una mappa continua (trasformazione) che le connette (ovvero non ci sono buchi ~~nello spazio~~ nel percorso di trasf.)

Un Dominio D è semplicemente connesso se ogni curva chiusa è omotopa ad un punto

Lunghezza di una curva

$$L = \int_a^b \left|\frac{dz}{dt}\right| dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt \qquad \int_\gamma f(z)\,dz$$

se $|f(z)| \leq M \quad \forall z \in \gamma \Rightarrow$ anche il $\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right|$ è limitato.

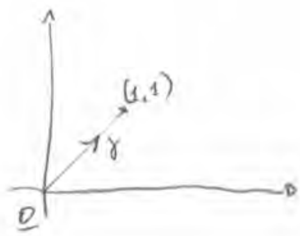
$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \leq \int_a^b dt \left|f(z(t))\frac{dz}{dt}\right| \leq M\int_a^b \left|\frac{dz}{dt}\right| dt = ML$$

ESEMPI

$\int_\gamma f(z)\,dz \qquad f(z)=z^2 \qquad z(t)=t+it$

$t\in[0,1] \qquad x(t)=t \qquad y(t)=t \qquad \frac{dz}{dt}=1+i$

$$z^2=(t+it)^2=2it^2$$



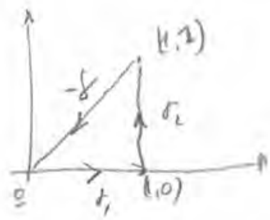

$$\int_0^1 f(z(t))\frac{dz}{dt}\,dt=\int_0^1 2it^2(1+i)\,dt=2(i-1)\int_0^1 t^2\,dt=$$

$$=\frac{2}{3}(i-1)$$

ORA INTEGRIAMO UNA $f$ NON OLOMORFA

$f(z)=|z|^2=x^2+y^2 \qquad f(z(t))=2t^2$

$$\int_\gamma f(z)\,dz=\int_0^1 2t^2(1+i)\,dt=\frac{2}{3}(i+1)$$




$\gamma_1$: $x=t \quad \frac{dx}{dt}=1$, $y=0 \quad \frac{dy}{dt}=0$, $t\in[0,1]$

$\frac{dx}{dt}=1 \qquad \frac{dy}{dt}=0$

$\gamma_2$: $x=1 \quad \frac{dx}{dt}=0$, $y=t$, $\frac{dy}{dt}=1$

$$\int_{\gamma_1} z^2\,dz+\int_{\gamma_2} z^2\,dz=\int_0^1 t^2\,dt+i\int_0^1(1+it)^2\,dt=\frac{1}{3}+i\int_0^1\left[1-t^2+2it\right]dt$$

$$=\frac{1}{3}+i-\frac{i}{3}-1=\frac{2}{3}(i-1)$$

$\neq$ la diff. integrale tra curve $f$ olomorfa e non in generale c'è.

$|z|^2$

$$\int_{\gamma_1}|z^2|\,dz+\int_{\gamma_2}|z|^2\,dz=\int_0^1 t^2\,dt+i\int_0^1(1+t^2)\,dt=\frac{1}{3}+i\left(1+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}+\frac{4}{3}i$$

int sulla curva $\gamma$ presa in verso opposta

$$\int_{-\gamma}|z^2|\,dt=\frac{1}{3}+\frac{4}{3}i-\frac{2}{3}(1+i)=-\frac{1}{3}+\frac{i}{3}$$

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2=\gamma} z^2\,dz=\frac{2}{3}(i-1)-\frac{2}{3}(i-1)=0$$

Teorema di Green

$\omega$ forma differenziale in $\mathbb{R}^2$

$$\omega = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

P e Q sono $C^1$ in D


$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma \left[ P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \right] =$$

$$= \iint_S \left[ \partial_x Q(x,y) - \partial_y P(x,y) \right] dx\,dy$$

$\omega$ si dice chiusa se $\partial_y P(x,y) = \partial_x Q(x,y) \longrightarrow \int_\gamma \omega = 0$

$\omega = \underline{df}$ si dice esatta

$$\int f\,dz = \int (u + iv)(dx + i\,dy) = \int (u\,dx - v\,dy) + i \int (u\,dy + v\,dx)$$